| APELLIDOS: |
|---|
| NOMBRE: |

## Derivadas parciales y diferencial de funciones de varias variables

**Ejercicio 1.** Halla las derivadas parciales de las siguientes funciones. Indica en qué conjunto $A$ son de clase $C^1$. Escribe el gradiente en el punto $(1, -1)$. Nota:

1. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1) =$ |
| $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -1) =$ |
| $\nabla f(1, -1) =$ | $f$ es de clase $C^1$ en |

2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1) =$ |
| $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -1) =$ |
| $\nabla f(1, -1) =$ | $f$ es de clase $C^1$ en |

3. $f(x, y) = \ln \dfrac{-xy}{x^2 + y^2 + 1}$

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1) =$ |
| $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -1) =$ |
| $\nabla f(1, -1) =$ | $f$ es de clase $C^1$ en |

**Ejercicio 2.** Consideramos la función vectorial $\overline{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$, siendo $f_1, f_2, f_3$ las funciones del ejercicio anterior. Escribe la matriz Jocobiana en el punto $(1, -1)$. Indica en qué conjunto $A$ es de clase $C^1$. Nota:

**Ejercicio 3.** Halla las derivadas parciales de las siguientes funciones. Indica en qué conjunto $A$ son de clase $C^1$. Escribe el gradiente en el punto $(1,1,2)$. Nota:

1. $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+yz}$

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,2) =$ |
| $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,2) =$ |
| $\dfrac{\partial f}{\partial z} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,2) =$ |
| $\nabla f(1,1,2) =$ | $f$ es de clase $C^1$ en |

2. $f(x,y,z) = (xy)^z$

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,2) =$ |
| $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,2) =$ |
| $\dfrac{\partial f}{\partial z} =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,2) =$ |
| $\nabla f(1,1,2) =$ | $f$ es de clase $C^1$ en |

**Ejercicio 4.** Consideramos la función vectorial $\overline{f}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$, siendo $f_1, f_2$ las funciones del ejercicio anterior. Escribe la matriz Jocobiana en el punto $(1,1,2)$. Indica en qué conjunto $A$ es de clase $C^1$. Nota:

**Ejercicio 5.** Comprueba con las siguientes funciones que la continuidad y la existencia de derivadas parciales no están relacionadas. Nota:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} y \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

**Ejercicio 6.** Demuestra que las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son diferenciables en todo el plano y calcula la diferencial en un punto $(a,b)$. Nota:

1. $f(x,y) = c$

2. $f(x,y)=x$

3. $f(x,y)=5x-2y+3$ SOLUCIÓN:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=5\ ,\ \ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=-2,\ \ \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

Para que sea difrenciable en $(a,,b)$, se tiene que cumplir

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\|(x-a,y-b)\|}=0.$$

Comprobamos que es cero que para todo $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{5x-2y+3-(5a-2b+3)-5\cdot(x-a)+2\cdot(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0.$$

Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es lineal, ¿cuál es su diferencial un punto cualquiera $\overline{a}\in\mathbb{R}^n$?

**Ejercicio 7.** Estudia la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de la función vectorial $\overline{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ siguiente. Escribe la matriz Jacobiana en el punto $(\pi,-\pi)$.

Nota:

$$\overline{f}(x,y)=\begin{cases}(e^{x+y},\sin(x-y),x\sin\frac{1}{x}) & \text{si } x)\neq 0\\ (e^{y},\sin(-y),0) & \text{si } x=0\end{cases}$$

**Ejercicio 8.** Utiliza la regla de la cadena para calcular las expresiones para las derivadas parciales que se indican de las siguientes funciones:

Nota:

1. $F(r,s,t) = x^4y + y^2z^3$ donde $x = rse^{-t}, y = rst, z = r^2s\,\mathrm{sen}(t)$.

   $\dfrac{\partial F}{\partial s}(2,1,0) = .$

2. $F(x,y) = f(g(x) + h(y), g(x)h(y))$.

   $\dfrac{\partial F}{\partial x} =$

3. $F(x,y) = f(g(x), g(x)h(y), h(y))$

   $\dfrac{\partial F}{\partial y} =$

4. $F(x,y,z) = f(x^2y^2, y^2z^2, x^2z^2)$

   $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,0) =$

   $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1,0) =$

   $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,0) =$

**Ejercicio 9.** Comprueba que las siguientes ecuaciones definen a $z$ como función implícita de $(x,y)$ en un entorno del punto que se indica y calcula $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en dicho punto.

1. $xyz + \operatorname{sen}(z-6) - 2(x+y+x^2y^2) = 0$ en $(x,y) = (1,1)$ con $z(1,1) = 6$.

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,6) = \qquad\qquad \neq 0$ | $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,6) =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,6) =$ |

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) =$ | $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1) =$ |

2. $y\cos(xz) + x^3e^{zy} - z + 1 = 0$ en $(x,y) = (0,0)$.

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,\quad) = \qquad\qquad \neq 0$ | $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,\quad) =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,\quad) =$ |

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0) =$ | $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0) =$ |

**Ejercicio 10.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(a,b)$. Utiliza la diferencial en el punto $(a,b)$ para aproximar el valor de $f(1+h_1, -1+h_2)$.

| Nota: |
|---|

Demuestra que para vectores $\overline{h} = (h_1, h_2)$ pequeños, el error es menor que $\|\overline{h}\|$.

Compruébalo con la función del ejercicio 1.2 en el punto $(1,-1)$ para el punto $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

¿Pasa lo mismo para valores más alejados del $(1,-1)$?, compruébalo para $f(-99, 99)$.

**Ejercicio 11.** Halla la pendiente de la superficie $f(x,y) = 9 - x^2 - 3y^2$ en el punto $(2,-1,2)$ en las direcciones dadas por los vectores $(1,0),(1,1)$ y $(0,1)$. $\boxed{\text{Nota:}\qquad\qquad}$

**Ejercicio 12.** La temperatura en grados centígrados en un punto $(x,y)$ de una placa metálica es de $T(x,y) = 500 - x^2 - 2y^2$. Halla la velocidad de cambio de la temperatura en el punto $(1,2)$ en la dirección del vector $\overline{v} = (u,v)$. $\boxed{\text{Nota:}\qquad\qquad}$

**Ejercicio 13.** Calcula las derivadas direccionales de las funciones siguientes en los puntos que se indican. $\boxed{\text{Nota:}\qquad\qquad}$

1. $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ en el punto $\overline{a} = (1,0)$ según el vector $\overline{v} = \frac{2i+j}{\sqrt{5}} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

2. $f(x,y) = e^x \cos(xy)$ en el punto $\overline{a} = (0,-1)$ según el vector $\overline{v} = -i + 2j = (-1,2)$.

**Ejercicio 14.** Halla el vector gradiente de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$ en el punto $(2, -1, 1)$. ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional?, ¿cuánto vale?, ¿hay alguna dirección en qué sea nula? Nota:

| | |
|---|---|
| $\nabla f(2, -1, 1) =$ | Dirección $=$ |
| Valor $=$ | Nula |

**Ejercicio 15.** El error cometido al medir cada una de las aristas de una caja rectangular es de $\pm 0.1$ milímetros. Utiliza $dV$ para estimar el error propagado y el error relativo que se puede cometer al hallar el volumen de una caja de aristas 50, 20 y 15 cm. Nota:

SOLUCIÓN

El volumen viene dado por la función $V(x, y, z) = xyz$, teniendo en cuenta que $\triangle x = \triangle y = \triangle z = \pm 0.1mm = \pm 0.01cm$, se tiene

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}(50, 20, 15)\triangle x + \frac{\partial V}{\partial y}(50, 20, 15)\triangle y + \frac{\partial V}{\partial z}(50, 20, 15)\triangle z =$$

$$= \triangle x(20 \times 15 + 50 \times 15 + 50 \times 20) = \pm 0.01cm \times 2050cm^2 = \pm 20.5cm^3$$

Como el volumen será $V(50, 20, 15) = 15000cm^3$, se tiene que el error relativo será

$$\frac{dV}{V} = \frac{20.5}{15000} \approx 0.00136 = 0.136\%.$$

**Ejercicio 16.** Dada la función $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right)$, calcula el vector normal a la curva de nivel que pasa por el punto $(1, 1)$. Nota:

Vector normal=

**Ejercicio 17.** Halla el plano tangente y la recta normal a las siguientes superficies, en los puntos que se indica. Nota:

1. $f(x, y) = x^2 + y^3$ en el punto $(3, 1, 10)$

Plano tangente.

Recta normal.

2. $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ en el punto $(1,1,1)$

| |
|---|
| Plano tangente. |

| |
|---|
| Recta normal. |

3. $z(xy-1) - x - y = 0$ en el punto $(1,2,3)$

| |
|---|
| Plano tangente. |

| |
|---|
| Recta normal. |

4. $z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0$ en el punto $(1, 1+\sqrt{e}, 1)$

| |
|---|
| Plano tangente. |

| |
|---|
| Recta normal. |

**Ejercicio 18.** Halla la recta tangente y la normal a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en un punto cualquiera $(x_0, y_0)$ de la misma.

Nota:

| |
|---|
| Recta tangente. |

| |
|---|
| Recta normal. |

**Ejercicio 19.** Halla la recta tangente a la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x(t) = e^t + \cos t$ , $y(t) = e^{-t} + \operatorname{sen} t$. en el punto $(x(0), y(0))$.

Nota:

| |
|---|
| Recta tangente. |

**Ejercicio 20.** Halla la recta tangente a la curva en $\mathbb{R}^3$ definida por la intersección de las superficies $z = xy$ , $x^2 + y^2 - 2z{=}4$ en el punto $(3,1,3)$.

Nota:

| |
|---|
| Recta tangente. |